11 Center. Centralizator. Normalizator.

Definicija (center grupe)
Center, $Z(G)$, grupe G je podmnožica elementov grupe G, ki komutirajo s vsakim elementom grupe G. S simboli zapisano:

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \text{ za vse } x \in G\}.$$

1. Pokaži da je $Z(G) = G$ če in samo če je G abelska.

2. Pokaži da je $Z(S_n) = \{id\}$ če je $n \geq 3$.

Izrek (center je podgrupa)
Center grupe G je podgrupa grupe G.

3. Dokaži izrek zgoraj.

4. Spomnimo se, da se diederska grupa D_n (reda $2n$) lahko generira z rotacijo $R_{360/n}$ (reda n) in refleksijo F (reda 2) za katere velja, da je $FR_{360/n}F = R_{360/n}^{-1}$. Poišči $Z(D_n)$ za poljuben $n \geq 3$.

5. Naj bo G grupa, in naj bo a poljubni element iz grupe G. Definirajmo preslikavo $\varphi_a : G \to G$ na naslednji način $\varphi_a(x) = axa^{-1}$. Dokaži da $\varphi_h = \varphi_g$ če in samo če $gh^{-1} \in Z(G)$.

6. Naj bo G grupa. Pokaži da je potem $Z(G) \lhd G$.

Definicija (centralizator elementa a v grupi G)
Naj bo a fiksen element grupe G. Centralizator elementa a v grupi G, $C(a)$, je množica vseh elementov iz grupe G, ki komutiraju z elementom a:

$$C(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}.$$

7. Množica $G = \{I, A, B, AB, BA, ABA\}$ tvori grupo glede na operacijo množenja, in njena Cayley-eva tabela je dana na desni strani.
(a) Izračunaj $Z(G)$.
(b) Izračunaj $C(A)$ in $C(AB)$.

	I	A	B	AB	BA	ABA
I	I	A	B	AB	BA	ABA
A	A	I	AB	B	ABA	BA
B	B	BA	I	ABA	A	AB
AB	AB	ABA	A	BA	I	B
BA	BA	B	ABA	I	AB	A
ABA	ABA	AB	BA	A	B	I

8. Dana je grupa S_n. Določi element iz $C(\alpha)$ ki ni v grupi $\langle\alpha\rangle$.

9. Naj bo G grupa in naj bo $a \in G$. Predpostavimo, da velja $|a| = 5$. Pokaži da $C(a) = C(a^3)$.

10. Naj bo D_4 diederska grupa reda 8. Uporabi Cayley-evo tabelo, ki smo jo imeli v eni od prejšnjih nalog, in določi $C(a)$ za $\forall a \in D_4$.

Izrek ($C(a)$ je podgrupa)
Za vsak element a grupe G, je centralizator elementa a podgrupa grupe G.

11. Dokaži izrek zgoraj.

Izrek (G/Z izrek)
Naj bo G grupa in naj bo $Z(G)$ center grupe G. Če je $G/Z(G)$ ciklična grupa, potem je G abelska.

12. Dokaži izrek zgoraj.

Spomnimo se, da je $\mathbb{Z}_p$ edina grupa (do izomorfizma) praštevilskoga reda p.

13. Naj bo p praštevilo in naj bo G taka grupa, da $|G| = p^3$. Če je $Z(G) \neq \{e\}$ in $Z(G) \neq G$, pokaži da je potem $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p$.

14. Naj bo G taka grupa, da je $[G : Z(G)] \leq 3$. Pokaži, da je potem G abelska.

15. Naj bo G končna grupa in naj bosta p, q dve praštevili, ne nujno različni. Če je $|G| = pq$, pokaži, da je potem G bodisi abelska, ali pa je $Z(G) = 1$.

Definicija (centralizator množice, normalizator množice)
Naj bo G grupa in $S \subseteq G$. Podmnožici

$$C_G(S) = \{g \in G \mid gs = sg, \text{ za } \forall s \in S\}$$

grupe G pravimo centralizator množice S.
Podmnožici

$$N_G(S) = \{g \in G \mid gS = Sg\}$$

grupe G pravimo normalizator množice S.
Upoštavajmo, da je $C_G(S)$ množica vseh elementov grupe G, ki komutirajo z vsakim elementom množice S.

Izrek ($C_G(S)$ in $N_G(S)$ sta podgrupi)
Naj bo G grupa in $S \subseteq G$. Potem sta $C_G(S)$ in $N_G(S)$ podgrupi v G.

16. Dokaži izrek zgoraj.

17. Naj bo G grupa in naj bo $A \subseteq G$. Preveri, ali je
(a) $Z(G) = C_G(G)$;
(b) $C_G(A) \leq N_G(A)$;
Če je G abelska, določi $C_G(A)$ in $N_G(A)$.

18. Naj bo D_4 diederska grupa reda 8, in naj bo $A = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$. Če vemo da je $D_4 = \langle R_{90}, H\rangle$, kjer je $R_{90}HR_{90} = H$, brez uporabe Cayley-eve tabele določi:
(a) $C_{D_4}(A)$;
(b) $N_{D_4}(A)$.

19. Naj bo $G = S_3$ in naj bo $A = \{id, (12)\}$. Izračunaj $C_{S_3}(A)$, $N_{S_3}(A)$ in $Z(S_3)$.

20. (a) Naj bo H podgrupa grupe G. Pokaži, da potem za vsak $x \in H$ velja $N_G(x^{-1}Hx) = x^{-1}N_G(H)x$.
(b) Izračunaj $N_{A_5}(\langle(123)\rangle)$ in $C_{A_5}(\langle(123)\rangle)$.
(c) Naj bo π permutacija. Pokaži da je potem $\pi(a_1a_2...a_k)\pi^{-1} = (\pi(a_1)\pi(a_2)...\pi(a_k))$.